Całkowanie

1 Cienki izolowany pręt o długości 2 m znajduje się w środowisku, które indukuje ładunek elektryczny na jego powierzchni. Znajdź całkowity ładunek, jeżeli pręt leży wzdłuż osi z pomiędzy $z = 2$ m i $z = 4$ m i gęstość liniowa ładunku wynosi

$\rho = 5z^3$ (μC/m) pomiędzy $z = 2$ m i $z = 4$ m oraz
$\rho = 0$ (μC/m) poza tym przedziałem.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

2 Moment bezwładności wirującej zatyczki stożkowej o wysokości h względem jej osi symetrii można wyznaczyć, obliczając całkę

$$I_x = \frac{\pi\rho}{2}\int_0^h [f(x)]^4 \mathrm{d}x,$$

gdzie oś x przyjmuje się jako oś symetrii zatyczki z wierzchołkiem w $x = 0$, oraz gdzie ρ to gęstość materiału, z którego zrobiona jest zatyczka, a $y = f(x)$ to rzut profilu stożka na płaszczyznę xy.
Znajdź moment bezwładności, jeśli $h = 15$ cm, $\rho = 0{,}05$ kg/cm^{-3} oraz:

(a) $f(x) = 3x/5$,

(b) $f(x) = x^2/60\pi$.

Odpowiedź **Rozwiązanie**

3 Moment bezwładności ciała względem osi obrotu dany jest jako

$$I = Mk^2,$$

gdzie M to masa ciała, a k to promień bezwładności względem osi obrotu.

Cienki trzpień o zmiennej gęstości i długości L, który w spoczynku ma jeden koniec w $x = 0$, a drugi koniec w $x = L$, wykonuje ruch obrotowy względem osi prostopadłej do trzpienia i przechodzącej przez $x = 0$. Moment bezwładności trzpienia w tym położeniu można obliczyć za pomocą całki:

$I = \int_0^L \rho(x)x^2\,\mathrm{d}x$, gdzie $\rho(x)$ to gęstość, a $M = \int_0^L \rho(x)\,\mathrm{d}x$.

Znajdź promień bezwładności trzpienia, jeśli:

(a) $L = 32$ cm oraz $\rho(x) = 0{,}1$ kg/cm^{-3},
(b) $L = 17$ cm oraz $\rho(x) = (0{,}1)(20 - x)$ kg/cm^{-3}.

Odpowiedź Rozwiązanie

---

4 Tempo wzrostu pewnych drobnoustrojów wyraża równanie

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 6 + 3\sin 2\pi t,$$

gdzie m to masa w gramach po t dniach. Jeśli masa w chwili $t = 0$ wynosi 30 g, znajdź masę po 8 dniach.

Odpowiedź Rozwiązanie

Odpowiedzi

1 300 μC

Pytanie Rozwiązanie

---

2 (a) $4{,}921\pi$ kg/cm^2 do jednego miejsca po przecinku
(b) 0,266 kg/cm^2 do trzech miejsc po przecinku

Pytanie Rozwiązanie

---

3 (a) $k = 18{,}48$ cm do dwóch miejsca po przecinku
(b) $k = 7{,}79$ cm do dwóch miejsc po przecinku

Pytanie Rozwiązanie

---

4 78 g

Pytanie Rozwiązanie

Rozwiązania

1 Całkowity ładunek wynosi $= \int_{-\infty}^{\infty} \rho(z)\mathrm{d}z = \int_{2}^{4} 5z^3\mathrm{d}z$

$$= \left[\frac{5z^4}{4}\right]_2^4 = (5\cdot 64) - (5\cdot 4) = 300\ \mu\text{C}.$$

Pytanie Odpowiedź

2 (a) Jeśli $f(x) = 3x/5$, to:

$$I_x = \frac{\pi\rho}{2}\int_0^h [f(x)]^4\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{\pi 0{,}05}{2}\int_0^{15} [3x/5]^4\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{81\pi 0{,}05}{2\cdot 625}\int_0^{15} x^4\,\mathrm{d}x$$
$$= 0{,}00324\pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{15}$$
$$= 0{,}00324\pi\left(\frac{15^5}{5}\right) = 492{,}1\pi\ \text{kg/cm}^2 \text{ do jednego miejsca po przecinku.}$$

(b) Jeśli $f(x) = x^2/60\pi$, to:

$$I_x = \frac{\pi\rho}{2}\int_0^h \left[x^2/60\pi\right]^4\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{0{,}05}{2\cdot\pi^3\cdot 60^4}\int_0^{15} x^8\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{0{,}05}{2\cdot\pi^3\cdot 60^4}\left[\frac{x^9}{9}\right]_0^{15}$$
$$= \frac{0{,}05}{3\pi^3\cdot 60^4}\left(\frac{15^9}{9}\right) = 0{,}266\,\text{kg/cm}^2 \text{ do trzech miejsc po przecinku.}$$

Pytanie Odpowiedź

3 (a) $L = 32$ cm oraz $\rho(x) = 0{,}1$ kg/cm^{-3}

$$I = \int_0^L \rho(x)x^2\,\mathrm{d}x$$
$$= 0{,}1\int_0^{32} x^2\,\mathrm{d}x$$
$$= 0{,}1\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{32}$$
$$= 0{,}1\left(\frac{32^3}{3}\right) = 1092{,}267 \text{ do trzech miejsc po przecinku}$$

$$M = \int_0^L \rho(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 0{,}1\int_0^{32} \mathrm{d}x$$
$$= 0{,}1\left[x\right]_0^{32} = 0{,}1(32) = 3{,}2$$

Zatem, jeśli $I = Mk^2$, czyli $1092{,}267 = 3{,}2k^2$, to
$k^2 = 1092{,}267/3{,}2 = 341{,}333$, więc $k = 18{,}48$ cm do dwóch miejsc po przecinku.

(b) $L = 17$ cm oraz $\rho(x) = (0{,}1)(20 - x)$ kg/cm^{-3}

$$I = \int_0^L \rho(x)x^2\,\mathrm{d}x$$
$$= 0{,}1\int_0^{17} (20 - x)x^2\,\mathrm{d}x$$
$$= 0{,}1\left[20\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{17}$$
$$= 0{,}1\left(20\frac{17^3}{3} - \frac{17^4}{4}\right) = 1187{,}308 \text{ do trzech miejsc po przecinku}$$

$$M = \int_0^L \rho(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 0{,}1\int_0^{17} (20 - x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 0{,}1\left[20x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{17}$$
$$= 0{,}1\left(20 \cdot 17 - \frac{17^2}{2}\right) = 19{,}55$$

Zatem, jeśli $I = Mk^2$, czyli $1187{,}308 = 19{,}55k^2$, to
$k^2 = 1187{,}308/19{,}55 = 60{,}731$, więc $k = 7{,}79$ cm do dwóch miejsc po przecinku.

Pytanie Odpowiedź

4 Mamy dane równanie $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 6 + 3\sin 2\pi t$ i wiemy, że masa w chwili $t = 0$ wynosi 30 g.
Całkowanie równania daje

$$\int \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}m = m = \int (6 + 3\sin 2\pi t)\,\mathrm{d}t = 6t - 3\frac{\cos 2\pi t}{2\pi} + C,$$

gdzie C jest stałą całkowania. Teraz podstawiamy $t = 0$ i $m = 30$ do otrzymanego wzoru

$$m = 6t - 3\frac{\cos 2\pi t}{2\pi} + C,$$

co daje

$$30 = -\frac{3}{2\pi} + C.$$

Zatem $C = 30 + \dfrac{3}{2\pi}$, a końcowy wzór opisujący masę ma postać

$$m = 30 + 6t - \frac{3}{2\pi}(\cos 2\pi t - 1).$$

Po ośmiu dniach

$$m = 30 + 6 \cdot 8 - \frac{3}{2\pi}(\cos 2 \cdot 8\pi - 1) = 78 - \frac{3}{2\pi}(1 - 1) = 78\ \mathrm{g}.$$

Pytanie Odpowiedź